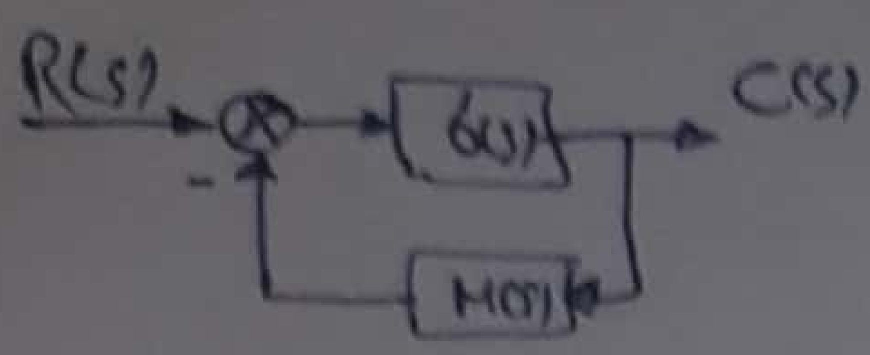
(صفحه ۱)

مکان هندسی ریشه ها:

شرایط زاویه و اندازه:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

معادله مشخصه:

$$1+G(s)H(s)=0$$

$$G(s)H(s)=-1$$

حاصل ضرب "$G(s)H(s)$" یک چند جمله ای از (s) است.

خواهیم داشت:

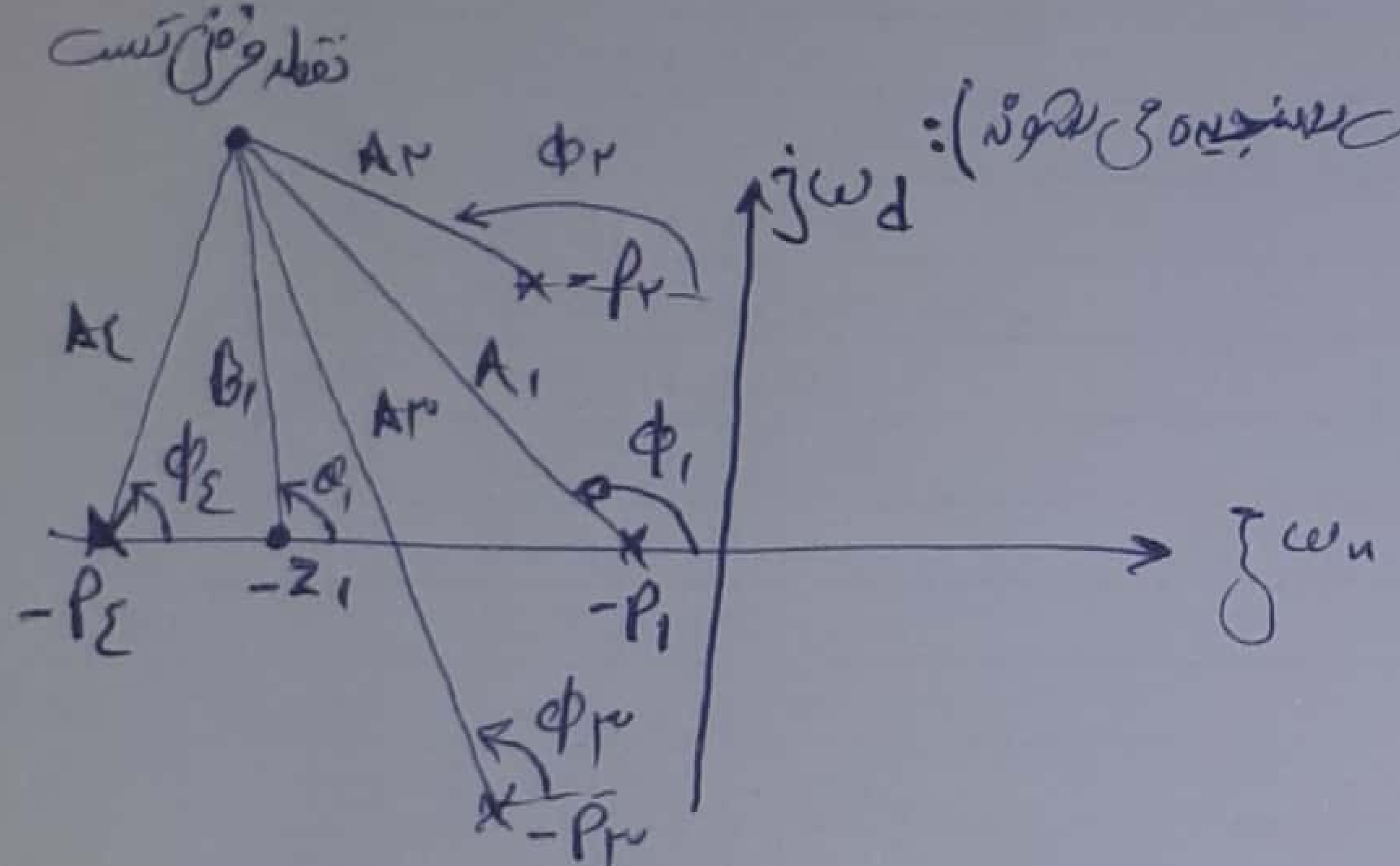
$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k+1) \; ; \; k=0,1,2,\dots$$

$$|G(s)H(s)|=1$$

اگر فرض کنیم که:

$$G(s)H(s)=\frac{k(s+z_1)}{(s+P_1)(s+P_2)(s+P_3)(s+P_4)}$$

و یک نقطه فرضی (S) در صفحه (S) داشته باشیم (زوایا خلاف عقربه ساعت سنجیده می شوند):



ϕ: زوایای قطب ها

θ: زوایای صفرها

* همواره نسبت به محور حقیقی تقارن داریم.

$$\angle G(s)H(s) = \theta_1-\phi_1-\phi_2-\phi_3-\phi_4$$

$$|G(s)H(s)| = \frac{kB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

مراحل رسم مکان هندسی:

(۱) معادله مشخصه به صورت ($1+kG(s)H(s)=0$) را پیدا می کنیم.

(۲) صفر و قطب حلقه باز و تعداد مکان ریشه ها را تعیین می کنیم. (منظور صفر و قطب ($G(s)H(s)$) است)

(۳) مکان هندسی روی محور حقیقی را تعیین می کنیم.

(۴) محاسبه مجانب ها: زاویه مجانب: $\frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}$ ، $\sigma = \frac{\text{صفرها} - \text{قطب ها}}{n-m}$

σ: محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی

(۵) محاسبات نقاط شکست

(۶) محل برخورد با محور موهومی

(۷) زوایای خروج از قطب و ورود به صفرهای مختلط

(۸) محاسبات نقاط زین اسبی (همان نقاط شکست)

مکان هندسی ریشه‌ها:

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)}$$

n قطب حلقه باز: $-p_1, \dots, -p_n$ $(n \geq m)$

m صفر حلقه باز: $-z_1, \dots, -z_m$

مرتبه معادله مشخصه: n ← سیستم حلقه بسته همواره (n) قطب دارد ← مکان هندسی (n) شاخه دارد

- به ازای $k=0$ ← قطب‌های حلقه بسته = قطب‌های حلقه باز
- به ازای $k=\infty$ ← قطب‌های حلقه بسته = صفرهای حلقه باز یا بی‌نهایت هستند

* n شاخه مکان هندسی از قطب‌های حلقه باز آغاز شده (از $k=0$) و به صفرهای حلقه باز (m عدد) و بی‌نهایت $(n-m)$ می‌روند (انتها: $k=\infty$)

مثال: مکان هندسی ($G(s)H(s)$) رسم شود:

$$G(s)H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s^2+2s+3)(s-1)}$$

$z_1=-1$, $z_2=-2$

$p_1=+1$, $p_{2,3}=-1\pm j\sqrt{2}$

شاخه: از قطب شروع و به صفر یا بی‌نهایت ختم می‌شود

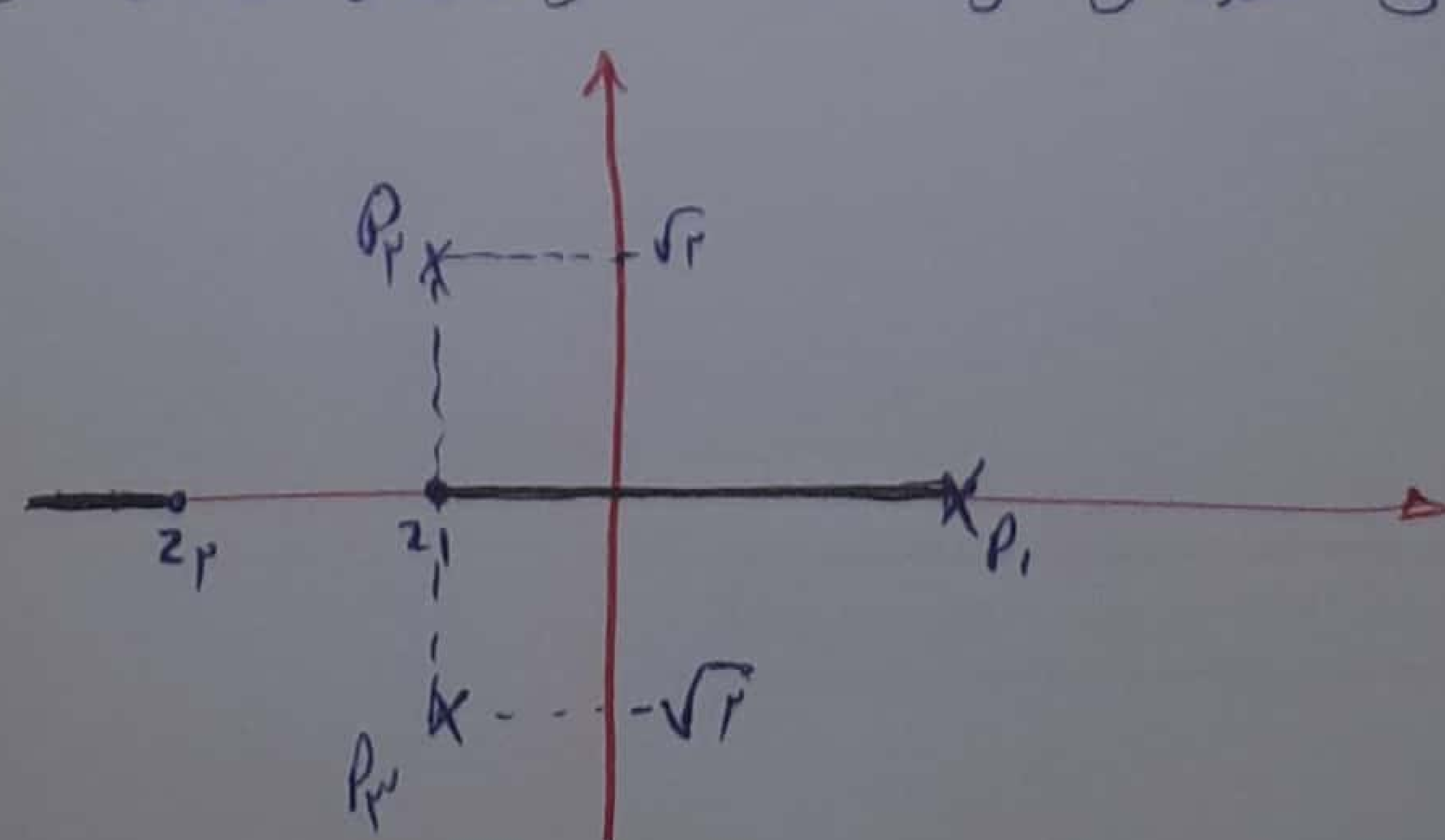
برای این مثال: $n=3$, $m=2$

* بنابراین ۳ شاخه داریم که ۲ تای آن از قطب شروع و به صفرها می‌رود. یک شاخه (۳-۲) از قطب شروع و به بی‌نهایت می‌رود.

← اگر نقطه تست (s_0) روی محور حقیقی باشد، برای قطب و صفرهای مختلط حلقه باز متقارن هستند مجموع زوایای آن‌ها صفر می‌شود. بنابراین زاویه نسبت به قطب و صفر حلقه باز روی محور برای قطب و صفر سمت چپ نقطه صفر است و برای سمت راست آن (π) است پس:

$\angle G(s)H(s) = k'\pi$; k': تعداد قطب و صفر حلقه باز سمت راست (s_0) ← روی محور حقیقی

تمام نقاط روی محور حقیقی که تعداد فرد صفر و قطب حلقه باز سمت راست آن است جزء مکان هندسی ریشه‌ها هستند. (برای k های مثبت) ها



مکان هندسی ریشه‌ها:

محاسبه مجانب ها:

زاویه مجانب ها:

$$\begin{cases} G(s)H(s) \underset{s\to\infty}{=} \dfrac{\text{ضریب}}{s^{n-m}} \\ \angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi \end{cases} \Longrightarrow \angle \frac{1}{s_0^{\,n-m}} = \pm(2k+1)\pi$$

$$\Downarrow$$

$$(n-m)\angle s_0 = \pm(2k+1)\pi$$

$$\Longrightarrow \angle s_0 = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} \quad (\text{زاویه مجانب‌ها})$$

حال می‌توان گفت که:

$$\begin{cases} n-m=1 \longrightarrow \text{زاویه مجانب} = \pi \\ n-m=2 \longrightarrow \text{زاویه مجانب ها} = \pm\frac{\pi}{2} \\ n-m=3 \longrightarrow \text{زاویه مجانب ها} = \pi ,\ \pm\frac{\pi}{3} \\ n-m=4 \longrightarrow \text{زاویه مجانب ها} = \pm\frac{\pi}{4} ,\ \pm\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی:

$$\sigma = \frac{\sum Z_j - \sum P_i}{n-m} \quad (\text{حتما عدد حقیقی است})$$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{\text{مجموع صفرهای حلقه باز} - \text{مجموع قطب های حلقه باز}}{n-m}$$

برای این مثال:

$$n-m=1 \longrightarrow \text{زاویه مجانب} = \pi$$

$$\text{محل برخورد با محور حقیقی} \longrightarrow \sigma = \frac{(1-1-j\sqrt{2}-1+j\sqrt{2}) - (-1-2)}{1} = \frac{-1+3}{1} = 2$$

تعیین نقاط شکست: نقاطی در مکان هندسی هستند که دو یا چند شاخه از آن عبور می‌کنند. به عبارتی معادله مشخصه حلقه بسته در نقاط شکست ریشه مکرر دارند.

$$\text{معادله مشخصه:}\ F(s) = 1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 0 \longrightarrow D(s) + kN(s) = 0$$

$$\text{در نقاط شکست:} \begin{cases} F(s)=0 \\ F'(s)=0 \longrightarrow D'(s) + kN'(s) = 0 \longrightarrow k = -\dfrac{D'(s)}{N'(s)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F(s)=0 \Rightarrow D(s) + \left(-\frac{D'(s)}{N'(s)}\right)N(s) = 0$$

$$\Longrightarrow D(s)N'(s) - D'(s)N(s) = 0 \longrightarrow \frac{d}{ds}\left(-\frac{N(s)}{D(s)}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \quad (\text{در نقاط شکست})$$

(صفحه ٤)

مکان هندسی ریشه‌ها:

بنابراین نقاط شکست زیرمجموعه‌های از ریشه‌های ($\frac{dk}{ds}=0$) هستند (اما نه همه ریشه‌های $\frac{dk}{ds}=0$) بلکه فقط آن دسته از ریشه‌ها که منجر به (k) مثبت حقیقی می‌شوند.

برای مثال داریم:

$$k=-\frac{(s-1)(s^2+2s+3)}{(s+1)(s+2)} \longrightarrow \frac{dk}{ds}=0 \rightarrow s^4+6s^3+8s^2+10s+11=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} s_{1,2}=0.016\pm j1.3 \longrightarrow k=0.32\pm j1.18 & \text{(نقطه شکست نیست)} \\ s_3=-1.14 \longrightarrow k=-2.16 & \text{(نقطه شکست نیست)} \\ s_4=-4.63 \longrightarrow k=8.95 & \text{(نقطه شکست است)} \end{cases}$$

محل برخورد مکان هندسی با محور موهومی:

با توجه به این که محور موهومی مرز پایداری است لازم است شکل مکان هندسی در این نواحی معلوم شود: دو روش دارد:

① به جای (s) در معادله مشخصه ($j\omega$) قرار می‌دهیم تا (k) و (ω) حقیقی پیدا شود (اگر پیدا نشد یعنی برخورد نداریم).

② روش پایداری راث هورویتز

در همین مثال:

$$1+kG(s)H(s)=0 \longrightarrow s^3+(k+1)s^2+(3k+1)s+2k-3=0$$

s^3	1	$3k+1$	0
s^2	$k+1$	$2k-3$	0
s	$\frac{3k^2+2k+4}{k+1}$	0	0
1	$2k-3$	0	0

$$\rightarrow \begin{cases} k+1>0 \rightarrow k>-1 \\ 3k^2+2k+4>0 \rightarrow k\in\mathbb{R} \quad \text{(همواره بزرگتر از صفر است)} \\ 2k-3>0 \rightarrow k>\frac{3}{2} \end{cases}$$

برای ($k>0$) خواهیم داشت: پس در ($0<k<\frac{3}{2}$) یک قطب در سمت راست ناپایدار داریم

در ($k>\frac{3}{2}$) هیچ قطبی در سمت راست ناپایدار نداریم

در ($k=\frac{3}{2}$) یک قطب در ($s=0$) داریم (ناپایدار بحرانی)

نکته: به ازای هر (k) مشخص یک قطب روی هر شاخه قرار دارد.

برای یافتن محل برخورد با محور موهومی یک سطر از روت راث را صفر کرده و با توجه به معادله کمکی آن می‌توان محل برخورد با محور موهومی را یافت:

$$A(s) \xrightarrow{k=\frac{3}{2}} A(s)=5.5s \longrightarrow A(s)=0 \longrightarrow$$ محل برخورد با محور موهومی: $\boxed{s=0}$

مکان هندسی ریشه ها:

زاویه حول قطب و صفر مختلط: (زاویه خروج از قطب و زاویه ورود به صفر)

با توجه به شرط زاویه برای یک نقطه آزمون حول قطب یا صفر مختلط می توان زاویه را حساب کرد.

← زاویه خروج از قطب P_R (ها) ϕ_R ساده:

$$\sum \theta_z - \sum \phi_p = \pi(2l+1)$$

$$\longrightarrow \phi_R = \pi + \sum \theta_R - \sum_{R \neq P} \phi_p$$

← زاویه خروج از قطب R ام

* ϕ_P: زاویه قطب P ام با قطب R ام

* θ_R: زاویه قطب R با صفر R ام

برای صفرها هم به همین ترتیب محاسبه می شود.

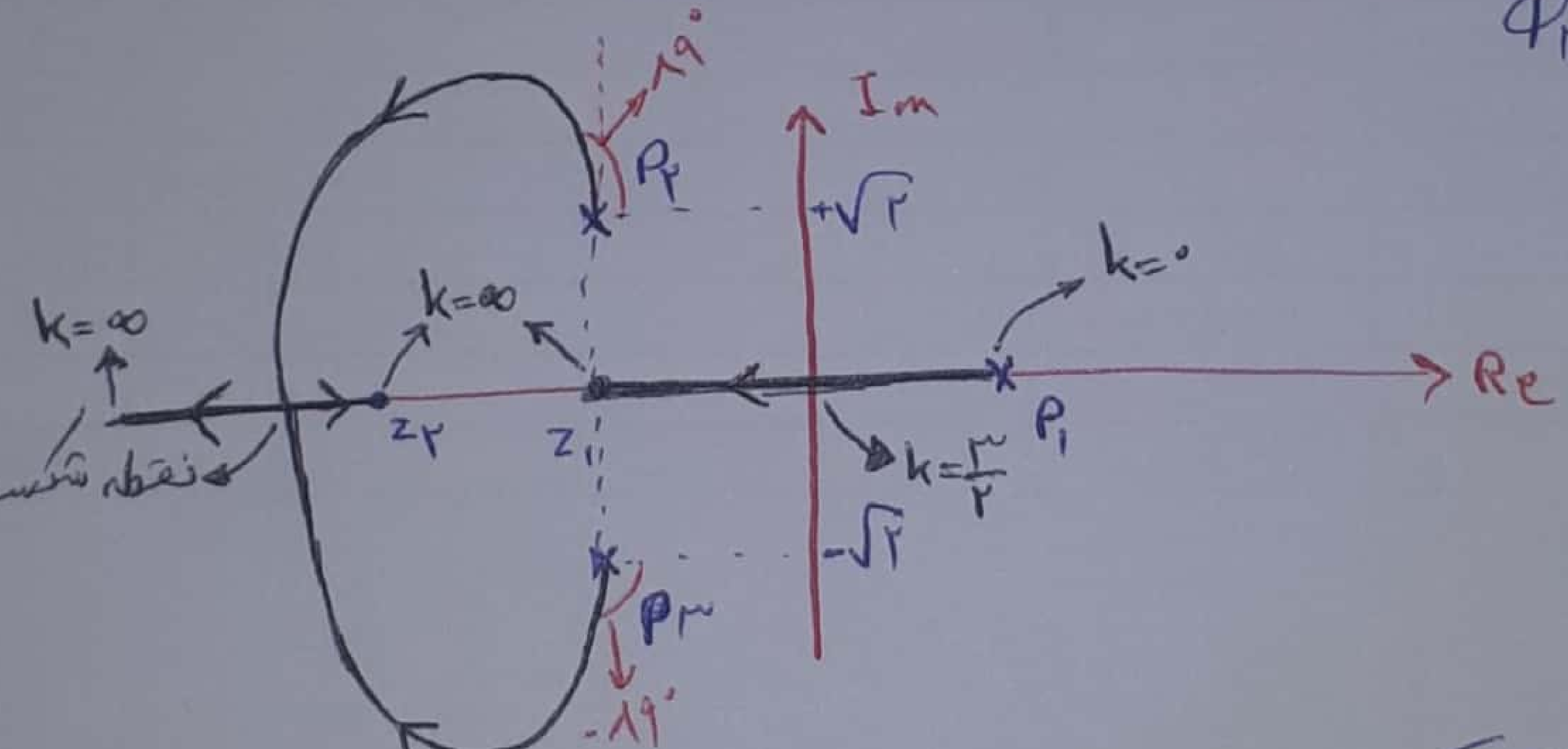
← برای این مثال: محاسبه زاویه خروج از قطب "P_2":

$$\phi_2 = 180^\circ + (\theta_1 + \theta_2) - (\phi_1 + \phi_3)$$

$$\longrightarrow \phi_2 = 180^\circ + \left(90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)\right) - \left(180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 90^\circ\right) \Longrightarrow \phi_2 = 89^\circ$$

به علت تقارن $\phi_3 = -89^\circ$

حال می توان گفت که:



نقطه شکست ($S = -4{,}63$)
($k = 8{,}95$)

نکته: این مکان هندسی نمایانگر این است که یک شاخه از P_1 به Z_1 می رود. همچنین یکی از شاخه های از P_2 یا P_3 شروع شده و به Z_2 می رود و دیگری به بی نهایت ختم می شود. این دو شاخه در ($k = 8{,}95$) با همدیگر تقاطع دارند. شکل دقیق شاخه از P_2 و P_3 تا نقطه شکست خیلی مهم نیست زیرا محاسبه رفتار دقیق در آن نواحی پیچیده است.

* دو تا شاخه هیچ گاه همدیگر را قطع نمی کنند مگر اینکه آن نقطه، نقطهٔ شکست باشد. اگر طوری رسم کردیم که تقاطع داشتند ولی آن جا نقطه شکست نبود یعنی ~~اشتباه~~ اشتباه رسم کرده ایم.

مکان هندسی ریشه‌ها:

نتایج حاصل از نمودار مکان هندسی:

$k<\frac{3}{2}$: حلقه بسته ناپایدار است.

$k>\frac{3}{2}$ ، سیستم پایدار است.

$\frac{3}{2}<k<8.95$: سیستم یک قطب حقیقی و دو قطب نوسانی مزدوج دارد (شبیه معادلات مرتبه دو می‌شود)

البته نزدیک تر از صفر است

$k=8.95$: یک قطب ساده (از شاخه P_1 تا Z_1) و یک قطب تکرار حقیقی دارد. یعنی: (قطب ساده >-1) و (قطب تکرار $=-4.6$)

بنابراین قطب ساده های قطب غالب است بنابراین رفتار سیستم شبیه به سیستم مرتبه یک است.

$k>8.95$: سه قطب حقیقی داریم. یکی بین ($-1<s_1<0$) دیگری ($-4.6<s_2<-2$) و در آخر ($s_3<-4.6$) است.

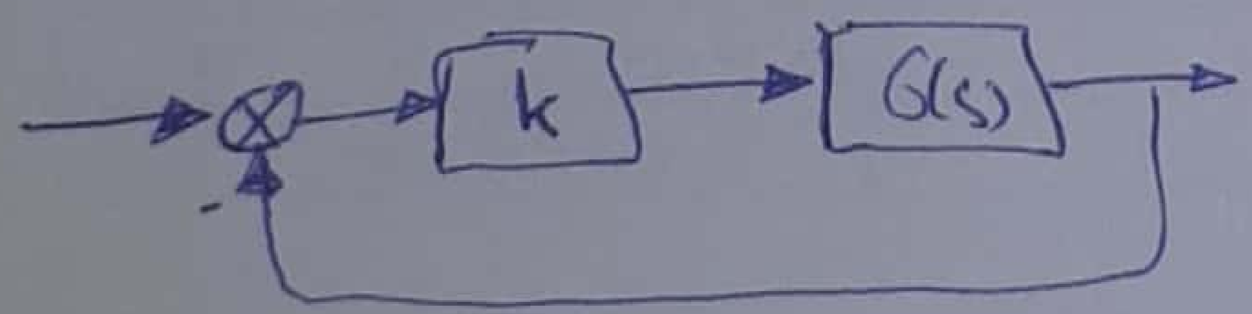
$k\to\infty$: سه قطب حقیقی داریم که یکی مغلوب است و دو قطب دیگر ($s_1=-1$) , ($s_2=-2$)

$k=\frac{3}{2}$: سیستم پایدار بحرانی می‌شود.

* نکته: در کل می‌توان گفت به ازای هر (k) معین یک قطب از هر شاخه وجود دارد.

مثال: سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را در نظر بگیرید. مکان هندسی قطب های حلقه بسته به ازای ($k>0$) را رسم کنید.

الف) کمترین مقدار (k) را به نحوی انتخاب کنید که درصد فراجهش سیستم حلقه بسته (5%) باشد در این حالت ب) زمان نشست را محاسبه کنید.



و $G(s)=\dfrac{s(s+1)}{(s-1)(s-2)(s^2+10s+34)}$

ابتدا معادله مشخصه را معلوم می‌کنیم:

$1+kG(s)=0 \rightarrow$

قطب و صفر حلقه باز:

$z_1=0$ و $z_2=-1$ ، $P_1=1$ و $P_2=2$ ، $P_{3,4}=-5\pm 3j$

$\leftarrow$ ($n=4$) و ($m=2$) بنابراین چهار شاخه مکان هندسی از ۲ صفر حلقه باز و ۲ صفر در بی‌نهایت داریم.

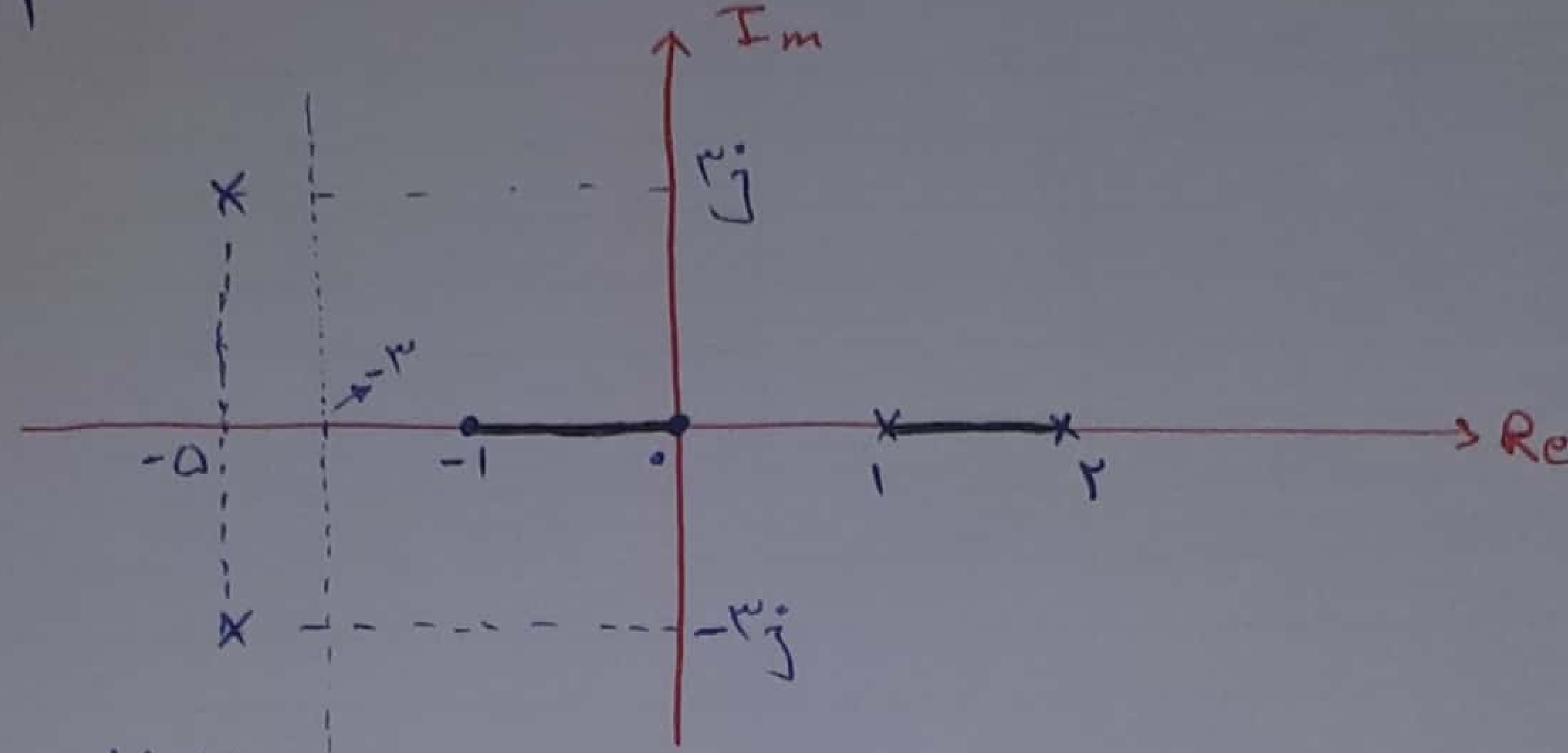
ابتدا محل قطب ها و صفرها را رسم می‌کنیم.

سپس مکان های هندسی را روی محور حقیقی می‌یابیم.

از آن جا که: ($n-m=2$) بنابراین (۲) مجانب داریم و دیدیم که برای $(n-m)=2$ زاویه مجانب ها ($\pm\frac{\pi}{2}$) است.

همچنین برای محل برخورد مجانب‌ها با محور حقیقی داریم:

$$\sigma = \frac{(1+2-5+3j-5-3j)-(-1+0)}{2} = -3$$



که در این خط دو مجانب با زوایای $\pm\frac{\pi}{2}$ داریم

نقاط شکست:

$$k = -\frac{(s-1)(s-2)(s^2+10s+34)}{s(s+1)} \rightarrow \frac{dk}{ds}=0 \rightarrow s^5+5s^4+7s^3+44s^2-68s-34=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} s_1 = -5.5 \rightarrow k = -18.2 & \times \\ s_{2,3} = -0.2 \pm 3.3j \rightarrow k = 337 \pm j40 & \times \\ s_4 = 1.4 \rightarrow k = 3.57 & \checkmark \\ s_5 = -0.4 \rightarrow k = 422 & \checkmark \end{cases}$$

محل برخورد با محور موهومی:

معادله مشخصه: $s^4+7s^3+(k+6)s^2+(k-82)s+68=0$

s^4	1	$k+6$	68	0
s^3	7	$k-82$	0	0
s^2	$3k-20$	238	0	0
s	$\frac{3k^2-266k-26}{3k-20}$	0	0	
1	238			

ملاحظه می‌شود که باید: $(3k-20>0)$ و $(3k^2-266k-26>0)$ باید رخ دهد:

$$\begin{cases} k > \frac{20}{3} \\ k < -0.1 \ \text{یا}\ k > 88.76 \end{cases} \xrightarrow{k>0} \boxed{k > 88.76}$$

برای $k=\frac{20}{3}$ سطر صفر نداریم (دو ریشه ناپایدار داریم)

برای $(k=88.76)$ سطر صفر داریم

(صفحه ۵)

مکان هندسی ریشه‌ها:

به ازای (k=88.76) :

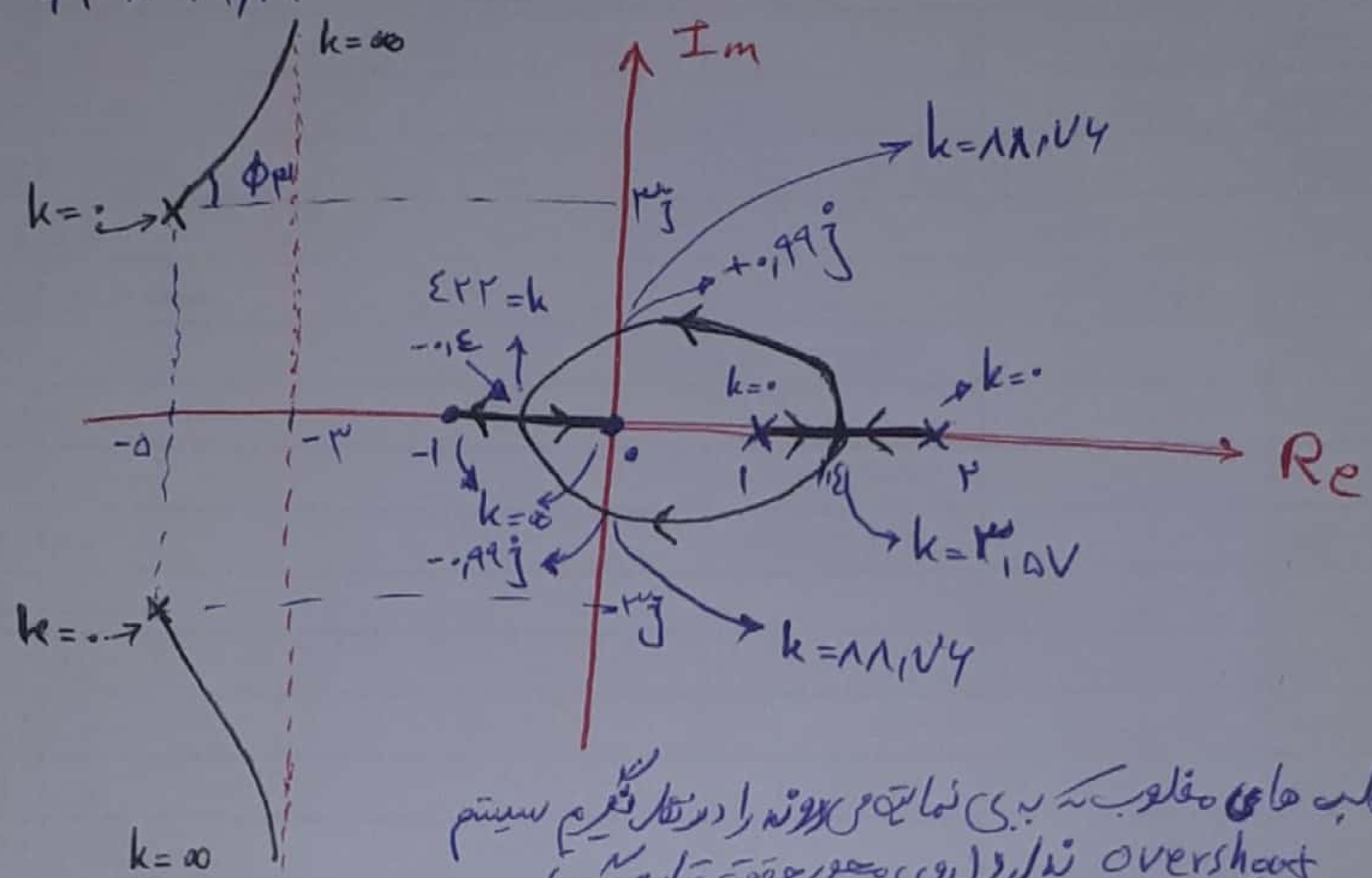
معادله کمکی : $A(s)=(3k-20)s^2+238=0 \xrightarrow{k=88.76} s_{1,2}=\pm j0.99$

زاویه خروج از قطب مختلط :

$$\phi_3 = 180° + (\theta_1+\theta_2) - (\phi_1+\phi_2+\phi_4)$$

$$\phi_3 = 180° + \left(180° - \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + 180° - \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right) - \left(180° - \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) + 180° - \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) + 90°\right)$$

$$\to \phi_3 = 71.8°$$



* در (k>422) اگر قطب های مطلوب به بی نهایت میروند را در نظر بگیریم سیستم overshoot ندارد (روی محور حقیقی قرار می‌گیرد)

* البته به شکل دیگری هم می‌توان رسم کرد، اما مهم نیست (همیشه سعی داریم ساده‌ترین شکل را بکشیم)

الف)

$$M_p = 0.05 \Rightarrow \zeta \simeq 0.7, \quad \zeta=\cos\theta \to \theta \simeq 45°$$

خط با زاویه (45°) مکان هندسی قطب های حلقه بسته‌ای است که منجر به فراجهش 5% می‌شود. محل برخورد این خط با مکان هندسی ریشه‌ها قطب های حلقه بسته مورد نظر است. نقطه برخورد خواهیم داشت :

$$s^*_{1,2} = -0.35 \pm j0.35$$

(k) از معیار اندازه قابل محاسبه است :

$$k^* = \frac{1}{|G(s^*)H(s^*)|} \Rightarrow k=275 \xrightarrow{\text{به ازای این (k)}} \begin{cases} s_{1,2} = -0.35 \pm j0.35 \quad ; \quad (\text{قطب غالب}) \\ s_{3,4} = -3.5 \pm j14.3 \end{cases}$$

برای یافتن زمان نشست از بخش حقیقی قطب های غالب استفاده می‌کنیم :

$$t_s = \frac{4}{0.35} = 11.4 (s)$$

سریع ترین زمان نشست مربوط به حالت بحرانی یعنی های (s = -0.4) است.